**Точки Брокара**

Геометрия начинается с треугольника. Треугольник – это простейшая фигура и по праву носит названия “кирпичика” геометрии, так как любой многоугольник мы можем разбить на треугольники. Вот уже два с половиной тысячелетия треугольник является символом геометрии. Постоянно открываются его новые свойства. Чтобы рассказать обо всех известных свойствах треугольника, потребуется большое количество времени. Особенно интересны так называемые «Замечательные точки треугольника».

Вначале, в 1816 Крелле, а затем в 1875 году Брокаром была поставлена и решена следующая задача: в треугольнике АВС найти точку *Ω* так, чтобы *∠ΩAB=∠ΩBC=∠ΩCA*. Точку *Ω* обычно называют *точкой Брокара (*хотябыло бы правильнее точку *Ω* называть точкой Крелле — Брокара.*)*. Угол φ равный каждому из углов *АВΩ, ΩBC, ΩCA*, называется *углом Брокара*

Точки Брокара обладают рядом интересных свойств, в частности, они переводятся друг в друга изогональным сопряжением (если в треугольнике *АВС* взять некоторую точку *Ω* и отразить прямые *АР*, *ВР*, *СР* относительно биссектрис углов треугольника *АВС*, то они пересекутся в некоторой точке *Ω'*, которая называется изогонально сопряженной точке *Ω*).

Исходя из сказанного, мы выбрали следующую ***тему исследовательской работы:*** «Точки Брокара».

***Актуальность исследования*** определяется недостаточной систематизацией знаний (материала) по заданной теме.

***Объект исследования -*** треугольники и их свойства

***Предмет исследования -*** точки Брокара, их свойства и практическое применение.

***Цель*** ***исследования*** – систематизировать свойства точек Брокара и описать их практическое применение при решении задач.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие ***задачи*** исследования:

1. Подобрать и проанализировать литературу по теме исследования.
2. .Систематизировать основные свойства точек Брокара
3. Описать применение свойств точек Брокара при решении практических задач.

***Теоретической основой*** ***исследования*** явились работы Изаака Д.Ф., Прасолова В.В, Зетеля С.И, Берже М, Выготского А.В, Бронштейна И.Н, Бородина А. И. и др.

***Теоретическая значимость*** исследования состоит в том, что проанализированы и систематизированы основные геометрические свойства точек Брокара.

***Практическая значимость*** работы заключается в описании практического применения свойств точек Брокара при решении задач геометрии треугольника.

Для любого треугольника существует ровно одна первая и одна вторая точки Брокара. Существует два способа построения как первой, так и второй точки Брокара. В нашей работе представлены доказательства этих утверждний.

Угол Брокара вычисляется по формуле:

*φ =arcctg (ctg A + ctg В + ctgC).*

У точек Брокара много свойств, которые присущи не только им. Среди них такие как: «если через центр *О* описанной окружности треугольника *АВС* повести прямые *АО, ВО* и *СО,* то они пересекут окружность в таких точках *А1, В1* и *С1*, что треугольники *А1В1С1* и *АВС* равны»; «если из центра *О* описанной окружности треугольника *АВС* опустить перпендикуляры O*A', OB'* и *ОС'* на его стороны, то точки А*',* В*'* и С*'* будут серединами сторон треугольника *АВС*, поэтому Δ*ABC*~Δ*A'B'C'*; углы для первой и второй точек Брокара совпадают»; «если *Ω* и *Ω'*, то прямые, полученные отражением прямых *АΩ, ВΩ, СΩ* относительно биссектрис углов *А, В, С* соответственно, пересекутся в точке *Ω'».*

Но есть и такие, которые свойственны только точкам Брокара, например *φ30°* и *ctg Ω = ctgА + ctgВ + ctgC.*

Но особый интерес представляют теоремы о взаимном расположении точек Брокара с медианами, биссектрисами и высотами треугольника:

* если точка Брокара *Ω* есть точка пересечения медиан, то треугольник АВС правильный;
* если точка Брокара *Ω* является пересечением медианы *СМ* с биссектрисой *АЕ*, то треугольник *АВС* правильный;
* если точка Брокара *Ω* является точкой пересечения медианы *СМ* с высотой *BD*, то треугольник *АВС* правильный;
* если точка Брокара *Ω* является точкой пересечения биссектрисы *СМ* с высотой *BD*, то треугольник *АВС* правильный.

В нашей работе проведены доказательства всех этих утверждений, позволяющих использовать точки Брокара и их свойства при решении практических геометрических задач.

Таким образом, можно сделать вывод, что в целом задачи решены, а цель нашего исследования, - *систематизировать свойства точек Брокара и описать их практическое применение при решении задач* - достигнута.