

### ЛАБОРАТОРНОЕ ЗАНЯТИЕ № 3

#### Сопряжение линий. Касательная к окружности

##### Учебные вопросы:

1. Общие положения
2. Построение касательной к окружности
3. Касание окружностей
4. Построение касательных к двум окружностям

##### Теоретический материал

##### 1. Общие положения

Очертания многих предметов представляют собой сочетание ряда: линий, в большинстве своем плавно переходящих одна в другую. Примером плавных переходов могут служить контуры различных видов художественных изделий, посуды, рисунки орнаментов и т.п.

Плавный переход одной линии в другую называют касанием линий, а точку, в которой происходит касание, точкой касания, или перехода (рис. 1). Например, две дуги радиусов  $R_1$  и  $R_2$ , касающиеся между собой (рис. 1 а), имеют общую точку касания  $A$ , лежащую на линии, соединяющей центры этих дуг – точки  $O_1$  и  $O_2$ . На рисунке 1 б изображена прямая, касающаяся дуги радиуса  $R$  и имеющая с ней общую точку касания  $B$ , расположенную на перпендикуляре, опущенном из центра дуги – точки  $O$  на прямую. Через любую точку касания можно провести общую касательную, которая будет перпендикулярна к радиусам дуг, проведенным в точку касания.

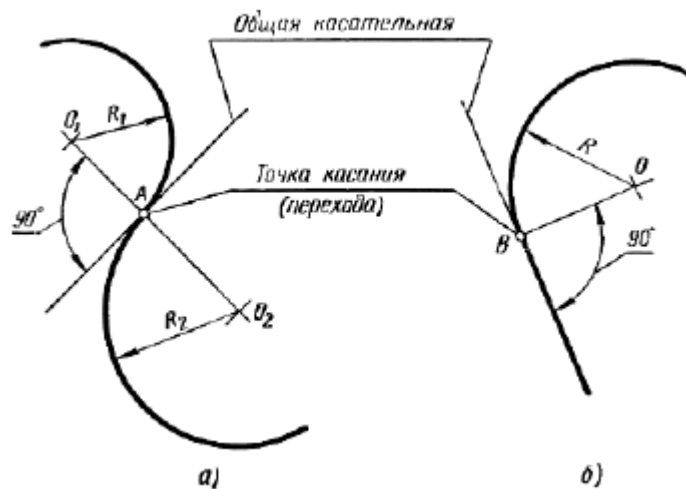


Рис. 1. Касание линий: а) касание двух дуг окружностей; б) касание прямой и дуги

Плавный переход одной линии в другую при помощи промежуточной линии называют сопряжением. На рисунке 2 такой промежуточной линией является дуга  $AB$  радиуса  $R_c$ , с помощью которой осуществлен плавный переход (сопряжение) от прямой к дуге окружности радиуса  $R$ .

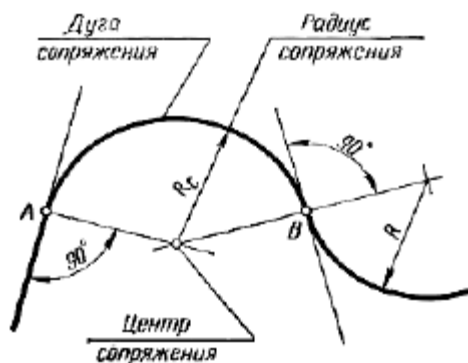


Рис. 2. Сопряжение прямой и дуги дугой окружности

Чаще всего промежуточной линией является дуга окружности, называемая дугой сопряжения, или сопрягающей дугой. Радиус сопрягающей дуги носит название радиуса сопряжения, а центр дуги – центра сопряжения. Дуга сопряжения касается одновременно двух сопрягаемых линий. При сопряжении всегда имеются две точки перехода (на рисунке 2 точки *A* и *B*), и через каждую из них можно провести по одной общей касательной.

Таким образом, построение сопряжений основано на свойствах касательной к дуге окружности и касания двух дуг окружностей.

## 2. Построение касательной к окружности

Подобное построение основано на том, что касательная перпендикулярна к радиусу окружности, проведенному в точку касания.

**Построение касательной к окружности в заданной на ней точке *A*** (рис. 3):

- начертить заданную окружность и отметить на ней точку *A*
  - из центра окружности *O* через точку *A* провести прямую за окружность (на расстояние примерно равное радиусу *OA*)
  - в точке *A* восстановить перпендикуляр к радиусу *OA* как описано ниже:
    - из точки *A* построить дугу (радиусом немного меньше длины отрезка *OA*) до пересечения с прямой *OA* в точках *B* и *C*
    - из точек *B* и *C*, как из центров, построить дуги одинакового радиуса (примерно равного длине отрезка *BC*) до пересечения этих дуг слева и справа от отрезка *BC*
    - точки *M* и *N* находятся на пересечении дуг, построенных из точек *B* и *C*
    - соединить точки *M* и *N*
    - линия *MN* проходит через точку *A* и перпендикулярна линии *OA*
- Проведенный перпендикуляр *MN* и является искомой касательной.

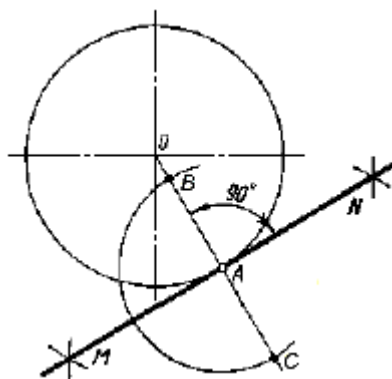


Рис. 3. Построение касательной к окружности в заданной на ней точке

**Построение касательной к окружности, если точка  $A$  задана вне окружности** (рис. 4).

Для решения задачи необходимо найти на окружности точку касания, через которую будет построена касательная к этой окружности (прямая), проходящая через заданную точку  $A$ .

Порядок построения:

- начертить заданную окружность и отметить вне ее точку  $A$
- центр окружности  $O$  и точку  $A$  соединить прямой
- отрезок  $OA$  принимают за диаметр вспомогательной окружности
- разделить отрезок  $OA$  пополам, получить точку  $O_1$ , как описано ниже:
  - из точек  $A$  и  $O$ , как из центров, провести дуги одинакового радиуса (примерно равного длине отрезка  $AO$ ) до пересечения этих дуг слева и справа от отрезка  $OA$
  - точки  $M$  и  $N$  находятся на пересечении дуг, построенных из центров  $A$  и  $O$
  - соединить точки  $M$  и  $N$
  - линия  $MN$  пересекает отрезок  $OA$  в точке  $O_1$  и делит его пополам
- из точки  $O_1$ , как из центра, описать вспомогательную окружность радиусом  $O_1A$
- вспомогательная окружность пересекает заданную окружность в точках  $B$  и  $C$
- провести прямую через точки  $A$  и  $B$
- провести прямую через точки  $A$  и  $C$

Прямая, проведенная через точки  $A$  и  $B$ , будет касательной к окружности, так как угол  $ABO$  прямой, как вписанный в окружность и опирающийся на ее диаметр.

Прямая  $AC$  является второй касательной к заданной окружности.

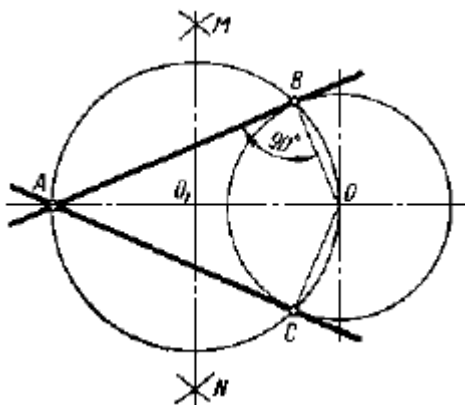


Рис. 4. Построение касательной к окружности через точку вне окружности

### 3. Касание окружностей

Различают два вида касания окружностей – внешнее и внутреннее.

При **внешнем касании** окружностей радиусов  $R$  и  $r$  (рис. 5 а) центры окружностей  $O_1$  и  $O_2$  располагаются по разные стороны от общей касательной  $MN$ , проведенной через точку касания  $A$ , а расстояние между ними равно сумме радиусов  $R + r$ . Точка касания  $A$  лежит на прямой, соединяющей центры касающихся окружностей.

**Внутреннее касание** окружностей (рис. 5 б) характеризуется тем, что центры касающихся окружностей  $O_1$  и  $O_2$  располагаются по одну сторону от общей касательной  $MN$ , проведенной через точку касания  $A$ , а расстояние между центрами касающихся окружностей равно разности радиусов  $R - r$ . Точка касания  $A$  окружностей в этом случае расположена на продолжении прямой, соединяющей их центры.

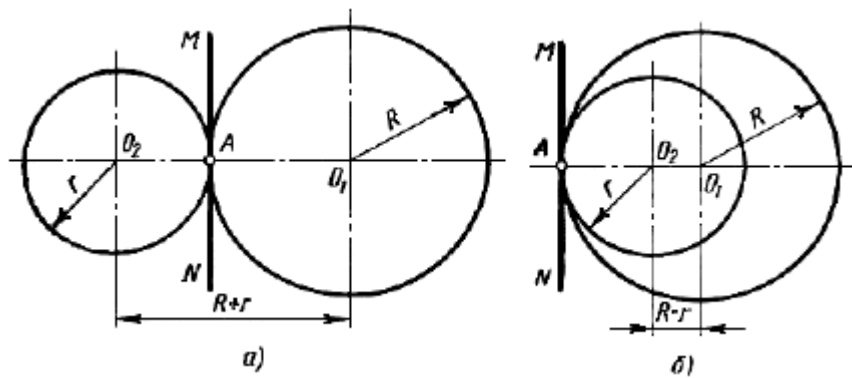


Рис. 5. Касания окружностей

**Построение внешнего касания окружности радиуса  $r$  к окружности радиуса  $R$  в данной на ней точке  $A$ .**

Построение внешнего касания окружностей (рис. 6):

- начертить заданную окружность радиуса  $R$  и центром в точке  $O_1$
- из центра окружности  $O_1$  через точку  $A$  провести прямую за окружность (на расстояние большее радиуса  $r$ )
- из центра  $O_1$  провести дугу радиусом  $R+r$  до пересечения ее с прямой  $O_1A$  в точке  $O_2$
- точка  $O_2$  является искомым центром окружности радиуса  $r$
- начертить искомую окружность радиуса  $r$  и центром в точке  $O_2$

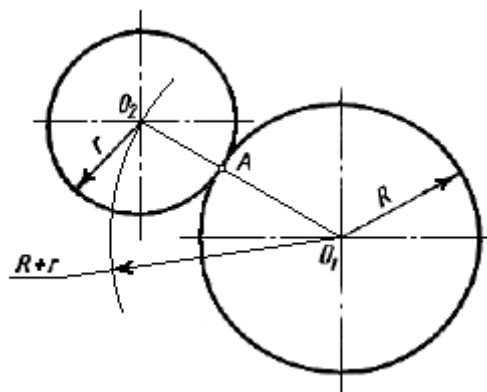


Рис. 6. Построение внутреннего касания окружностей

**Построение внутреннего касания окружности радиуса  $r$  к окружности радиуса  $R$  в данной на ней точке  $A$ .**

Построение внутреннего касания окружностей (рис. 7):

- начертить заданную окружность радиуса  $R$  и центром в точке  $O_1$
- точку  $A$  и центр  $O_1$  заданной окружности соединить прямой
- из центра  $O_1$  провести дугу радиусом  $R-r$  до пересечения ее с прямой  $O_1A$  в точке  $O_2$
- точка  $O_2$  является искомым центром окружности радиуса  $r$
- начертить искомую окружность радиуса  $r$  и центром в точке  $O_2$



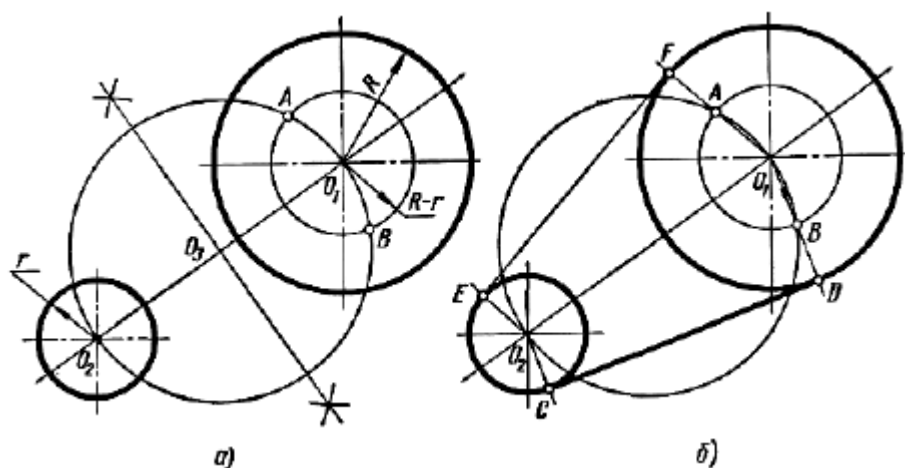


Рис. 8. Построение общей внешней касательной к двум окружностям

**Построение общей внутренней касательной к двум окружностям радиусов  $R$  и  $r$**  (рис. 9).

Порядок построения:

- начертить заданную окружность радиуса  $R$  и центром в точке  $O_1$
  - начертить заданную окружность радиуса  $r$  и центром в точке  $O_2$
  - из центра любой окружности, например: точки  $O_1$ , описать первую вспомогательную окружность радиусом  $R+r$  (рис. 9 а)
  - соединить точки  $O_1$  и  $O_2$
  - найти середину отрезка  $O_2O_1$  – точку  $O_3$
  - из точки  $O_3$  провести вторую вспомогательную окружность радиусом  $O_3O_2$  или  $O_3O_1$
  - обе вспомогательные окружности пересекаются в точках  $A$  и  $B$
  - соединить точки  $O_1$  и  $A$ , точка пересечения этого отрезка с окружностью радиуса  $R$  является точкой касания  $D$  (рис. 9 б)
  - из точки  $O_2$  **параллельно** (например, с помощью линейки и угольника) прямой  $O_1D$  провести линию до пересечения с окружностью радиуса  $r$ , получается вторая точка касания  $C$
  - соединить точки  $C$  и  $D$
- Прямая  $CD$  – искомая внутренняя касательная к заданным окружностям.  
Аналогично строится вторая касательная  $EF$ .

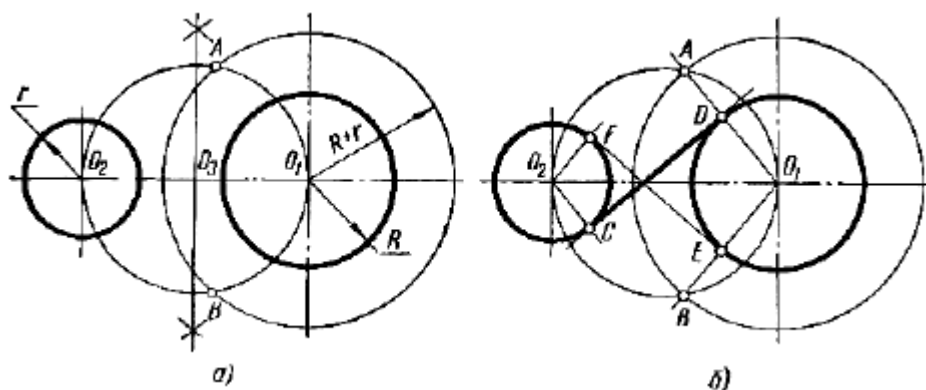


Рис. 9. Построение общей внутренней касательной к двум окружностям

## ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ НА ЛЗ-3

### Сопряжение линий. Касательная к окружности

#### Построение рамки и основной надписи

1. На **2-х** листах А4 ватмана начертить рамку и основную надпись. Ориентация листа – книжная.

2. Заполнить соответствующие ячейки основной надписи.

Конкретный текст и размер шрифта для каждой графы указаны ниже.

Текст в графе начинается с прописной (большой) буквы, остальные строчные.

При вписывании текста рекомендуется легкими тонкими линиями отметить высоту строчных (маленьких) букв и наклон первой буквы.

Записать в основную надпись стандартный текст (смотри ЛЗ-1 рис. 9).

В основной надписи заполнять **ТОЛЬКО** указанные ниже графы.

в графе 1 – наименование изделия – вписать текст: **Сопряжение линий**, размер шрифта 7, просчитать расположение текста в одну или две строки, вписать текст по центру ячейки по вертикали и по горизонтали

в графе 2 – обозначение документа – **обозначение документа состоит из набора прописных букв и цифр, разделенных точками и тире. Составить обозначение документа по следующим правилам:**

– инициалы фамилии, имени и отчества (например, Петров Валерий Иванович – **ПВИ**)

– специальность – курс (например, ТЭ-ЭТБ-11 или ТЭ-ТИБ-11, 1 курс – **ТЭ-ЭТБ-11**)

– номер лабораторного занятия (например, лабораторное занятие № 3 – **ЛЗ-3**)

– порядковый номер чертежа на лабораторном занятии

– в обозначении отдельные элементы записываются через точку без пробелов (например: Петров Валерий Иванович, ТЭ-ЭТБ-11, 1 курс, лабораторное занятие № 3, чертеж № 1 – **ПВИ.ТЭ-ЭТБ-11.ЛЗ-3.1**)

– обозначение документа записывается посередине графы, шрифт 7

в графе 6 – масштаб (без буквы М) – вписать текст: **1:1**, размер шрифта 7, вписать текст по центру ячейки по вертикали и по горизонтали

в графе 7 – порядковый номер листа – после слова **Лист** вписать для каждого листа соответствующий номер листа: **1** или **2**

в графе 8 – общее количество листов документа (указывают только на первом листе) – вписать текст: **2** – после слова **Листов**

в графе 9 – наименование или код организации, выпускающего документ – вписать текст: **МГУ ЭПК**, размер шрифта 7, вписать текст по центру ячейки по вертикали и по горизонтали

в графе 11 – фамилии лиц, подписавших документ – в строке «Разраб.» написать **фамилию студента, исполнившего чертеж**; в строке «Пров.» написать **фамилию преподавателя**; размер шрифта – **3,5**

в графе 12 – подписи лиц, фамилии которых указаны в графе 11 – в строке «Разраб.» расписывается **студент**, выполнивший чертеж; в строке «Пров.» расписывается **преподаватель**; подписи выполняются **черной ручкой**.

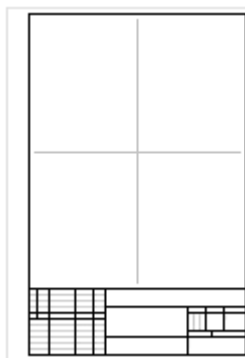
Подпись лица, разработавшего данный документ, является обязательной.

в графе 13 – дату подписания документа – в строке «Разраб.» **студент** ставит дату выполнения чертежа; в строке «Пров.» ставит дату проверки **преподаватель**; даты ставятся **черной ручкой**.

#### На листе 1 формата А4.

3. На листе 1 **легкими тонкими линиями** разметить область чертежа на 2 равные части по вертикали (между верхней границей рамки и основной надписью). Верхнюю и нижнюю части

разделить по горизонтали на 2 равные части. **Фигуры располагать равномерно по горизонтали и вертикали в каждой из частей.**



#### 4. Построение касательной к окружности

На **листе 1** в **верхней** части **слева** и **справа** соответственно разместить чертежи построения касательной к окружности в *заданной на ней* точке и в точке *заданной вне окружности*.

**Рекомендуется сначала построения выполнить в тетради или на отдельном листе А4 чтобы уяснить принцип и порядок выполнения построений, определить размеры итогового изображения. А затем выполнить эти же построения на ватмане.**

##### Задание

На **листе 1** в **верхней** части **слева** начертить окружность радиуса **25 мм**. В верхней правой четверти окружности выбрать произвольную точку **A** и построить касательную к данной окружности в точке **A** (смотри теоретический вопрос №2).

**!!!! Точка A НЕ должна** лежать на одной горизонтальной/вертикальной линии с центром окружности.



На **листе 1** в **верхней** части **справа** начертить окружность радиуса **20 мм**. В верхней правой четверти от окружности выбрать произвольную точку **A** на расстоянии **50 мм** от ее центра и построить касательные к данной окружности, проходящие через точку **A** (смотри теоретический вопрос №2).

**!!!! Точка A НЕ должна** лежать на одной горизонтальной/вертикальной линии с центром окружности.

#### 5. Касания окружностей

На листе 1 в **нижней** части **слева** и **справа** соответственно разместить чертежи построения *внешнего* касания окружностей в заданной точке и *внутреннего* касания в заданной точке.

**Рекомендуется сначала построения выполнить в тетради.**



### Задание

На листе 1 в **нижней** части **слева** начертить окружность №1 радиуса **25 мм**. В верхней левой четверти окружности выбрать произвольную точку **A** и построить окружность №2 радиуса **20 мм** так чтобы она касалась окружности №1 в точке **A** (смотри теоретический вопрос №3).

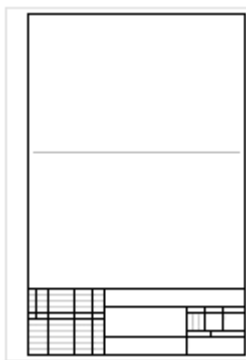
**!!!!** Точка **A** **НЕ должна** лежать на одной горизонтальной/вертикальной линии с центром окружности.

На листе 1 в **нижней** части **справа** начертить окружность №1 радиуса **30 мм**. В нижней правой четверти окружности выбрать произвольную точку **A**. Определить точку **O<sub>2</sub>** центра окружности №2 радиуса **20 мм** и построить внутреннюю окружность №2, проходящую через точку **A** с центром в точке **O<sub>2</sub>** (смотри теоретический вопрос №3).

**!!!!** Точка **A** **НЕ должна** лежать на одной горизонтальной/вертикальной линии с центром окружности.

### На листе 2 формата А4.

6. На листе 2 легкими тонкими линиями разметить область чертежа на 2 равные части по вертикали (между верхней границей рамки и основной надписью). **Фигуры располагать равномерно по горизонтали и вертикали в каждой из частей.**



### 7. Построение касательных к двум окружностям

На **листе 2** **по центру** в **верхней** и **нижней** частях соответственно разместить чертежи построения *внешней* касательной к окружностям и *внутренней* касательной к окружностям.

**Рекомендуется сначала построения выполнить в тетради.**

### Задание

На листе 2 в **верхней** части **по центру** провести окружность №1 радиуса **35 мм**. В нижней правой четверти окружности на расстоянии **100 мм** от ее центра выбрать произвольную точку **O<sub>2</sub>** и провести окружность №2 радиуса **20 мм** с центром в этой точке **O<sub>2</sub>**. Построить внешнюю касательную к данным окружностям №1 и 2 (смотри теоретический вопрос № 4).

**!!!!** Точка **O<sub>2</sub>** **НЕ должна** лежать на одной горизонтальной/вертикальной линии с центром окружности.

На листе 2 в **нижней** части **по центру** провести окружность №3 радиуса **30 мм**. В нижней правой четверти окружности на расстоянии **70 мм** от ее центра выбрать произвольную точку **O<sub>4</sub>** и провести окружность №4 радиуса **20 мм** с центром в этой точке **O<sub>4</sub>**. Построить внутреннюю касательную к данным окружностям №3 и №4 (смотри теоретический вопрос № 4).

**!!!!** Точка **O<sub>4</sub>** **НЕ должна** лежать на одной горизонтальной/вертикальной линии с центром окружности.

Представить работу преподавателю для проверки (2 ватмана А4).

### **ЗАДАНИЕ НА САМОСТОЯТЕЛЬНУЮ РАБОТУ № 3**

Изучить теоретический материал Лабораторного занятия №3.

Если студент не успел закончить выполнение задания на Лабораторном занятии №3, закончить его на самостоятельной работе и представить результаты преподавателю для проверки на ЛЗ-4.

#### **Видео для ознакомления**

[https://www.youtube.com/watch?v=WCpAUC0Q0\\_8&list=PLD321c29p-uWLR45tKmoch3nrBUEU60Bhn&index=7](https://www.youtube.com/watch?v=WCpAUC0Q0_8&list=PLD321c29p-uWLR45tKmoch3nrBUEU60Bhn&index=7)  
построение сопряжений ч.1

[https://www.youtube.com/watch?v=sTpTy5-\\_fo&list=PLD321c29p-uWLR45tKmoch3nrBUEU60Bhn&index=6](https://www.youtube.com/watch?v=sTpTy5-_fo&list=PLD321c29p-uWLR45tKmoch3nrBUEU60Bhn&index=6)  
построение сопряжений ч.2

<https://www.youtube.com/watch?v=OtR9XSLGi64&list=PLD321c29p-uWLR45tKmoch3nrBUEU60Bhn&index=5>  
построение сопряжений ч.3

<https://www.youtube.com/watch?v=XhBzuJxIK9s&list=PLD321c29p-uWLR45tKmoch3nrBUEU60Bhn&index=4>  
построение сопряжений ч.4а

<https://www.youtube.com/watch?v=tX8V3Mfr-dA&list=PLD321c29p-uWLR45tKmoch3nrBUEU60Bhn&index=3>  
построение сопряжений ч.4б

[https://www.youtube.com/watch?v=NQnCoel\\_lg4&list=PLD321c29p-uWLR45tKmoch3nrBUEU60Bhn&index=2](https://www.youtube.com/watch?v=NQnCoel_lg4&list=PLD321c29p-uWLR45tKmoch3nrBUEU60Bhn&index=2)  
построение сопряжений ч.4в

<https://www.youtube.com/watch?v=Fc0KVMiCfgM&list=PLD321c29p-uWLR45tKmoch3nrBUEU60Bhn&index=1>  
построение сопряжений ч.5