

Упражнения

№ 1. Укажите условие и заключение в следующих теоремах:

- 1) Вертикальные углы равны между собой.
- 2) Во всяком треугольнике против равных углов лежат равные стороны.
- 3) Отрезок прямой, соединяющий две какие-нибудь точки, короче всякой ломаной, соединяющей эти точки.
- 4) Сумма углов треугольника равна двум прямым.

№ 2. Выделите условие и заключение в каждой из следующих аксиом:

- 1) Существует одна и только одна прямая, проходящая через две различные точки.
- 2) Существует одна и только одна плоскость, проходящая через три данные точки, не лежащие на одной прямой.
- 3) Если две точки прямой лежат в некоторой плоскости, то эта прямая принадлежит этой плоскости.

№ 3. Запишите в виде условного предложения то, что « A есть следствие B ».

№ 4. Замените следующие предложения парами более простых по форме предложений, эквивалентных им:

- 1) Если A или B , то C .
- 2) Если A , то B и C .

№ 5. Объясните различие между предложениями: «Если A или B , то C » и «Если A и B , то C ».

№ 6. Укажите строение каждой теоремы (выберите нужное из предложенных: « A или B есть C »; « A есть B или C »; « A и B есть C »; « A есть B и C »).

- 1) Число, кратное 2 и 3, делится на 6.
- 2) Число, оканчивающееся 0 или 5, делится на 5.
- 3) Число, кратное 15, делится на 3 и 5.
- 4) Число, кратное 5, оканчивается нулем или цифрой на 5.

№ 7. Для каждой из следующих теорем сформулируйте обратную, противоположную и противоположную обратной теоремы:

- 1) Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.
- 2) Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.
- 3) Если многоугольник правильный, то около него можно описать окружность.
- 4) Если сумма цифр числа делится на 3, то само число делится на 3.
- 5) Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность, и притом только одну.

№ 8. Сформулируйте необходимое и достаточное условие для того, чтобы:

- 1) треугольник был прямоугольным;
- 2) из трех отрезков a , b , c можно было построить треугольник.

№ 9. В следующих предложениях вместо многоточия поставьте «необходимо», «достаточно», а где это возможно, «необходимо и достаточно» так, чтобы получилось справедливое утверждение:

- 1) для того, чтобы сумма пяти положительных чисел была меньше 100,, чтобы хоть одно число было меньше 20;
- 2) для того, чтобы основание треугольника равнялось 20 см, а высота — 10 см,, чтобы площадь треугольника равнялась 100 см^2 ;
- 3) для того, чтобы площадь треугольника равнялась 50 см^2 ,, чтобы основание треугольника равнялось 20 см, а высота — 5 см;
- 4) для того, чтобы площадь треугольника равнялась 100 см^2 ,, чтобы основание треугольника равнялось 5 см;
- 5) для того, чтобы число делилось на 3,, чтобы оно оканчивалось цифрой 5;
- 6) для того, чтобы треугольник был прямоугольным,, чтобы имело место $c^2 = a^2 + b^2$, где a , b , c — стороны треугольника;
- 7) для того, чтобы четырехугольник был параллелограммом, ..., чтобы четырехугольник имел центр симметрии;
- 8) для того, чтобы число делилось на 12,, чтобы оно делилось на 3;
- 9) для того, чтобы две прямые не имели общей точки,, чтобы они были параллельны.

№ 10. В следующих предложениях вместо многоточия поставьте «тогда» (в смысле «из A следует B »), а где это возможно, «тогда и только тогда» так, чтобы получилось справедливое утверждение:

1) $5x - 8 = 0$, когда $x = 1, 6$;

2) $(x^2 - 1)(x - 2)$, когда $x = 2$;

3) сумма четырех чисел четна, когда каждое слагаемое нечетно.

№ 11. Запишите на языке логики предикатов следующие определения:

1) Множество $A \subset R$ ограничено сверху (снизу), если существует такое вещественное число x_m , что для всех чисел $a \in A$ выполнено условие $a \leq x_m$ ($a \geq x_m$).

2) Два вектора \bar{a} и \bar{b} из R^3 перпендикулярны, если их скалярное произведение равно нулю.

3) Последовательность $\{x_n\}$ называется возрастающей (убывающей), если при $n = 1, 2, \dots, x_{n+1} > x_n$, ($x_{n+1} < x_n$).

4) Функция $f(x)$ называется периодической, если существует такое число $T \neq 0$, что при любом x из области определения функции числа $x - T$ и $x + T$ также принадлежат этой области и выполняется условие $f(x \pm T) = f(x)$.

№ 12. Используя приведенную основную теорему, сформулируйте к ней обратную, противоположную и обратную к противоположной теореме, и проверьте их истинность, приведя необходимые примеры.

1) Если в четырехугольнике диагонали взаимно перпендикулярны, то этот четырехугольник — ромб.

2) Если функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой точке x_0 , то она в этой точке непрерывна.

3) Если дифференцируемая функция $f(x)$ имеет в точке x_0 максимум или минимум, то ее производная обращается в нуль в этой точке.

4) Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах этого отрезка принимает значения разных знаков. Тогда между точками a и b найдется, по крайней мере, одна точка $c \in (a, b)$, в которой функция обращается в нуль: $f(c) = 0$.

№ 13. Дополните следующие предложения словами «необходимо и достаточно», «необходимо и недостаточно», «достаточно, но необходимо», «не необходимо и недостаточно», сформулировав необходимые и достаточные условия.

1) Для того чтобы два треугольника были равны,, чтобы все углы одного треугольника были равны соответствующим углам другого.

2) Для того чтобы все стороны многоугольника были равны,
....., чтобы этот многоугольник был правильным.

3) Для того чтобы два вектора в R^2 были линейно зависимы,
....., чтобы они были коллинеарны.

№ 14. Определите, какая зависимость (равносильны; одно является следствием другого; независимы, т.е. из истинности одного не следует ни истинность, ни ложность другого; одно является отрицанием другого) существует между следующими предложениями.

- 1) «Если A , то B » и «Если не B , то не A ».
- 2) «Если A , то B » и «Если не A , то не B ».
- 3) «Если A , то B » и «Если A , то не B ».
- 4) «Если A , то B » и «Если A , то B и C ».